

**UEBER DIE INTEGRATION VON $U=0$ UND
DIE KONFORME ABBILDUNG.
HABILITATIONSSCHRIFT ZUR
ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI EINER
HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT MARBURG**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649778454

Ueber die Integration von $u=0$ und die Konforme Abbildung. Habilitationsschrift zur Erlangung der Venia Legendi einer Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg by Dr. Friedrich von Dalwigk

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

DR. FRIEDRICH VON DALWIGK

**UEBER DIE INTEGRATION VON $U=0$ UND
DIE KONFORME ABBILDUNG.
HABILITATIONSSCHRIFT ZUR
ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI EINER
HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT MARBURG**

⊙

Ueber die Integration von $\Delta u = 0$
und die konforme Abbildung.

Habilitationsschrift

zur Erlangung der Venia legendi

einer hohen philosophischen Fakultät der
Universität Marburg

eingereicht von

Dr. Friedrich von Dalwigk.

Marburg 1897.

Druck der kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen, München.

Erster Teil.

§ 1. Die Schwarz'sche Arbeit „Zur Theorie der Abbildung“ (Züricher Programm 1869, Werke II, 108—32) betrifft ein endliches convexes Gebiet, welches ein Stück der Zahlenebene einfach bedeckt. Die Randlinie C habe nur vereinzelte Ecken und sonst überall eine bestimmte Tangente, welche sich stetig dreht beim Fortrücken des Berührungspunktes.¹⁾ Doch sind auch geradlinige Randstücke zulässig. Benutzt wird weiter die Eigenschaft, dass es äquidistante Kurven in geringem Abstand aussen um C gibt; bei den Ecken werden etwa Kreisbogen als Teile dieser Kurven auftreten. Andere Bedingungen braucht C nicht zu erfüllen.²⁾

¹⁾ Ich werde später in diesem Sinne oft kurz von stetiger Biegung der Kurventeile reden.

²⁾ Will man die Kurve analytisch geben, etwa durch $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$, und bezeichnet $\theta = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} \frac{\psi'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}$ den Winkel der Tangente gegen die x -Axe, so soll θ zwischen den Ecken stetig sein. In den Ecken hat es endliche sprunghafte Aenderungen. (Nach Neumann heisse θ dann abteilungsweise stetig.) Weiter soll θ niemals abnehmen bei positivem Umlauf um die Kurve. Bei einem vollen Umlauf wächst es um 2π . Eine Linie, welche auf den äusseren Normalen von C das konstante Stück r abschneidet und stetig verläuft, soweit sie den stetig gebogenen Teilen von C entspricht, wird gegeben durch $x_1 = \varphi(\sigma) + r \sin \theta$, $y_1 = \psi(\sigma) - r \cos \theta$ durch Kreisbogen bei den Ecken kann man diese Teile zu einer geschlossenen Linie verbinden. Damit diese Kurve aber sicher überall eine

Herr Schwarz geht aus von einer unendlichen Reihe geradliniger Polygone $C_1, C_2 \dots C_m \dots$, welche die Randkurve C umschliessen und sich ihr als Grenzlage mehr und mehr annähern. C_m verlaufe ganz innerhalb eines Flächenstreifens von der konstanten Breite η_m aussen um C , und dabei mögen $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_m \dots$ eine abnehmende Grössenreihe mit konvergenter Summe bilden in Rücksicht auf einen späteren Konvergenzbeweis.¹⁾ Weiter liege C_m innerhalb oder doch nicht ausserhalb C_{m-1} , es darf Teile damit gemein haben.

Zu jedem Polygone C_m gibt es eine Funktion $s_m(z)$, welche das von C_m umgrenzte Gebiet $(1,1)$ deutlich und konform auf die Fläche eines Einheitskreises $|z| \leq 1$ abbildet. (Die Konformität hört nur für die Ecken auf.)²⁾

Tangente hat und damit die Tangente parallel ist zu derjenigen der ursprünglichen Kurve im zugehörigen Punkt (abgesehen von den Ecken von C), dazu muss man θ' als vorhanden und abteilungsweise stetig annehmen. Weiter ist dann $\theta' \geq 0$ wegen der Konvexität.

Wenn daher die einzelnen stetig gebogenen Teile von C eine abteilungsweise stetige Krümmung haben, so genügt das jedenfalls für die ganze Betrachtung.

¹⁾ Bei Schwarz ist durch besondere Einführung der Polygone $\eta_m = \frac{1}{2} \cdot \eta_{m-1} = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \eta_1 = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \eta$. Diese Einführung hängt damit zusammen, dass Hr. Schwarz in einem ungedruckt gebliebenen ersten Teil der Arbeit die Abbildung derjenigen Gebiete auf eine Kreisfläche eingehend behandelt hatte, welche durch Aneinanderfügen von gleichen Quadraten entstehen. An sich braucht die Gestalt der Polygone keinen weiteren Bedingungen zu unterliegen als den oben im Text genannten, z. B. kann man ganz konvexe Polygone, etwa Tangentenpolygone, benutzen.

²⁾ Ich benutze hier z und nicht u als die komplexe Variable, weil ich u später immer als Zeichen für ein Potential verwende. — Auf mehrere Existenzbeweise von $s_m(z)$ für das Gebiet sammt dem Rand C_m gehe ich hier nicht näher ein. Ich

Dabei entspreche einem festen Punkt O ($z = 0$) im Innern von C der Mittelpunkt $s = 0$ des Kreises. Der noch willkürliche Bestandteil in $s_m(z)$ werde dadurch festgelegt, dass $\left(\frac{ds_m(z)}{dz}\right)_{z=0}$ reell und positiv sei.

Unter Benutzung der Konvexität der Randkurve zeigt Hr. Schwarz die Konvergenz des Produktes

$$s = s_1(z) \cdot \frac{s_2(z)}{s_1(z)} \cdot \frac{s_3(z)}{s_2(z)} \cdots \frac{s_m(z)}{s_{m-1}(z)} \cdots$$

und seinen Charakter als analytische Funktion. Das gelingt zwar nicht für das ganze von C begrenzte Gebiet, wie es erwünscht wäre, aber doch für das Innere einer Kreisfläche, deren Rand gerade C von innen berührt (Bd. II S. 125 unten).

Um zu einem vollen Beweis zu kommen, geht er dann über zu den inversen Funktionen $z_1(s), z_2(s) \dots z_m(s) \dots$, welche in der ganzen Kreisfläche $|s| \leq 1$ definiert sind, und deren Reihenentwicklungen nach Potenzen von s sogar auf dem Rande noch gelten, nach dem Dirichlet'schen Satz über Fouriér'sche Reihen. Es zeigt sich, dass $z_1(s), z_2(s) \dots$ eine Grenzfunktion

$$z(s) = z_1(s) + (z_2(s) - z_1(s)) + (z_3(s) - z_2(s)) + \dots$$

haben, welche durch eine konvergente Potenzreihe für $|s| < 1$ (nicht ≤ 1) dargestellt wird. Weiter entspricht dem Kreis $|s| = \sigma < 1$ durch Abbildung mittels $z(s)$ eine geschlossene Kurve innerhalb C , welche sich bei Annäherung des σ an 1 überall unbegrenzt an C annähert. Die Funktion vermittelt eine eindeutige und konforme Beziehung des Innern von C und des Kreisinnern aufeinander.

will nur hervorheben, dass die Bedenken von Hrn. Jules Riemann gegen die Schläfli'sche Untersuchung (Crelle's Jour. 78) sich auf ein geradliniges Polygon mit einspringenden Ecken beziehen, also die in der letzten Anm. erwähnten ganz konvexen Polygone nicht betreffen würden. — S. auch § 8 im 2. Teil. 1*

Ob aber noch ein eindeutiges und stetiges Entsprechen der Ränder besteht, geht aus der Abhandlung, soweit sie veröffentlicht ist, nicht hervor. Vom allgemeinen Beweis des Hrn. Schwarz ist mir Näheres nicht bekannt. Sobald aber die Randlinie eine analytische Kurve ist oder sich aus einer endlichen Anzahl von regulären Stücken analytischer Linien zusammensetzt, lässt sich alles — auch hinsichtlich der Ecken — ziemlich leicht erledigen. Und für nicht analytische Randlinie steht wenigstens das Vorhandensein der Green'schen Funktion ($R_{\text{Igs}}(z)$) fest.¹⁾

§ 2. Ehe ich auf die Verhältnisse der Abbildung am Rande näher eingehe, will ich eine für später wichtige Verallgemeinerung des bisher als konvex gedachten Gebietes vornehmen. Die Randlinie C sei teils konvex, teils konkav; jeder Radiusvektor, der von einem passend gewählten inneren Punkt O ausgeht, treffe sie nur einmal und schneide sie dabei unter einem wesentlich von O verschiedenen Winkel. Gleichbedeutend hiermit ist die Annahme, dass die Gesamtheit aller Tangenten von C einen Teil des Inneren nicht überdeckt (und in diesem Teil ist der Punkt O zu wählen; O soll bei der Abbildung wieder dem Kreismittelpunkt entsprechen).

Ueber die Natur der Randlinie scheint man jetzt etwas mehr voraussetzen zu müssen als bisher. Jedenfalls genügt es, wenn für die konkaven Teile noch angenommen wird, dass es an jedem Punkt einen Berührungskreis gibt, der ganz ausserhalb C liegt und nur die Berührungsstelle

¹⁾ Harnack hat sich auf die Green'sche Funktion beschränkt und dafür den Schwarz'schen Beweis beträchtlich vereinfacht, indem er den Satz aufstellte: „Eine konvergente Reihe aus positiven Potentialen ist im Innern ihres Konvergenzbereiches gleichmässig konvergent und damit selbst ein Potential.“ Dieser Satz hat später noch an Bedeutung ge-

mit C gemein hat. Man kann dafür auch sagen: es soll einen Kreis von endlicher, festbleibender Grösse geben, welcher aussen an C hinrollen kann und immer C nur an einer Stelle berührt¹⁾. (Wenn C überhaupt Ecken hat, sind es deshalb nur ausspringende.)

Aussen um C verlaufe eine äquidistante Kurve C'' im Abstand η (bei den ausspringenden Ecken treten wieder Kreisbogenstücke als Teile dieser Kurve auf). Zu C'' werde ein ähnlich verkleinertes Bild entworfen, indem man jeden von O ausgehenden Radiusvektor im Verhältnis $1 : (1 + \delta)$ verkürzt. Ist dann δ in passender Weise proportional zu η bestimmt und ist η selbst hinreichend klein²⁾, dann soll bewiesen werden, dass das Bild von C'' innerhalb C liegt.

Als Grundgedanke zum Beweis kann folgender dienen: $\rho^{(o)}$ sei die untere Grenze für den senkrechten Abstand aller Tangenten der Linie C von O . Dann ergibt die

Figur³⁾ $PQ : OP = PP'' : ON \leq \frac{\eta}{\rho^{(o)}}$. Gesucht ist eine Grenze

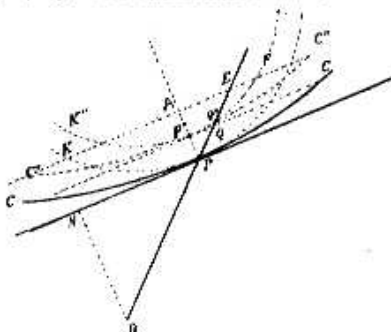
wonnen als eine der Grundlagen für die Poincaré'sche Methode der Auskehrung (balayage). American Journal Bd. 12. — Beiläufig wird Harnack durch seinen Satz auch frei von der Beschränkung auf ein konvexes Gebiet.

¹⁾ Nimmt man von den konkaven Kurventeilen an, dass sie stetige oder doch ableitungsweise stetige Krümmung besitzen, dann sind die genannten äusseren Berührungskreise oder der aussen rollende Kreis gewiss vorhanden und man ist sicher frei von unzuverlässigen Raumvorstellungen. Ich verweise darüber auf § 16 und auf den Anhang der „zweiten“ Neumann'schen Abhandlung „über die Methode des arithmetischen Mittels“ (1888). Dort ist eine Linie von stetiger Krümmung benutzt, aber die Abänderung ist leicht.

²⁾ Bei konvexer Kurve ist diese Einschränkung für η unnötig.

³⁾ Die Bezeichnung ist entsprechend wie bei Schwarz, Werke II, 112.

für $PQ'' : OP$. An den concaven Randteilen liegt PQ'' zwar über PQ , es wird sich aber für kleines η verhältnismässig wenig davon unterscheiden, z. B. sicher kleiner als $2 \cdot PQ$ sein. Für $\delta = \frac{2\eta}{\rho^{(a)}}$ wäre dann $OQ'' : OP < 1 + \delta$ und das Bild von C'' für ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $1 : (1 + \delta)$ fiel ins Innere von C .



Das hier unter Benutzung der Anschauung ausgesprochene muss streng bewiesen werden. Dazu gehe ich aus von dem weiter oben eingeführten Kreis, welcher die Linie C in P von aussen berührt und sie sonst nirgends trifft. Er sei K , und sein fester, von P unabhängiger Radius sei R . Der concentrische Kreis K'' von Radius $R - \eta$ berührt C'' in P'' und hat weiter keinen Punkt damit gemein. Die Strecke PP'' auf der Kurvennormale werde um sich selbst verlängert. Durch den Endpunkt A zieht man eine Parallele zur Tangente in P , also eine Parallele im Abstand 2η . Es kommt darauf an zu zeigen, dass bei hinreichend kleinem η der verlängerte Radiusvektor OP erst C'' und dann diese Gerade trifft. Dazu genügt, dass erst K'' und dann die Parallele getroffen wird, weil K'' ausserhalb C'' liegt. Ist $\alpha_0 (> 0)$ die untere Grenze