MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649650422

Mémoire sur l'Intégration Graphique des Équations aux Dérivées Partielles by J. Massau

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

J. MASSAU

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Trieste

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU, 1852-1909
Ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand.

GAND,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,
Rue des Foulons, 1, (près de l'Université).

1900

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU
Ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand.

AVANT-PROPOS.

Nous nous proposons d'exposer, dans ce mémoire, une méthode d'intégration graphique des équations aux dérivées partielles et de résoudre, par ce moyen, les problèmes du mouvement varié des eaux courantes et de la poussée des terres. Nous avons déjà, en 1889 (1), publié le principe de notre méthode dans les termes suivants : « On se donne » des courbes arbitraires et, s'il y a lieu, des dérivées le long de ces » courbes; on détermine les éléments de proche en proche. Les dis- » continuités des courbes arbitraires se propagent suivant les carac- » téristiques de Monge. Dans le mouvement varié des eaux courantes, » ces caractéristiques représentent le mouvement de deux ondes infi- » niment petites, l'onde d'amont, l'onde d'aval; l'onde devient finie » quand il y a mascaret. Dans la poussée des terres, ces caractéris- » tiques divisent le massif en régions; une des régions se trouve sous » l'influence du mur de soutènement; une autre se trouve dans les » mêmes conditions que si le massif était indéfini. Ces recherches » feront l'objet d'un mémoire spécial. »

(1) V. *Annales des Ingénieurs sortis des Écoles de Gand* (t. XII, p. 435).

Dans le tome XXII des *Annales des Ing. de Gand* (1) a paru un article intitulé : « Résolution de deux questions sur le mouvement varié des eaux. » Nous lisons dans cet article que « ce problème défie les plus savants analystes. » Un seul travail antérieur y est cité ; c'est « un travail qui a paru en 1877, aux *Annales des Ponts et Chaussées* » *de France*, et où l'auteur discute longuement certaines propriétés » des courbes de débit d'une rivière en crue, sans toutefois en dégager » des conséquences qui puissent conduire au tracé des axes hydrau- » liques en mouvement varié ». Il n'est pas fait mention de notre méthode que l'auteur de l'article précité devait connaître, nous avons les meilleures raisons de le croire. Mais, quoi qu'il en soit à cet égard, l'auteur de la « Résolution », s'il s'est appuyé sur l'intégration par éléments en partant des courbes arbitraires, n'a pas rencontré le seul point important de nos recherches : la propagation des discontinuités suivant les caractéristiques de Monge, et nous croyons que, sans utiliser cette propriété, il n'est pas possible de résoudre, même approximativement, les problèmes de mécanique appliquée qui dépendent d'équations aux dérivées partielles.

La « résolution de deux questions du mouvement varié » repose sur l'application répétée du problème suivant : on donne l'axe hydraulique à l'instant t, trouver l'axe hydraulique à l'instant $t + \Delta t$. On part du niveau d'aval supposé connu ; on essaie une valeur du débit ; on détermine de proche en proche les éléments du nouvel axe hydraulique et la variation de débit, au moyen de l'équation du mouvement varié et de l'équation de continuité. L'axe hydraulique définitif s'obtiendra par tâtonnements ; la valeur d'essai du débit ne sera exacte que si l'on trouve dans la section supérieure le débit déterminé par le diagramme de la crue. Il résulte de là que les circonstances d'amont et d'aval exercent leur influence sur toute l'étendue du nouvel axe hydraulique. Supposons le mouvement permanent établi à l'instant t où la crue commence ; quelque petit que soit Δt, on trouvera à l'instant $t + \Delta t$, un nouvel axe hydraulique complètement différent du premier, de telle sorte que la première manifestation de la crue se propage instantanément dans toute la longueur de la rivière. Cela nous paraît inadmissible.

Les tâtonnements dont il vient d'être question nous paraissent également très discutables. Dans tous les problèmes de dynamique, on peut toujours calculer directement les différentielles, et, approximativement, les accroissements des fonctions inconnues ; cela tient à la forme même des équations de la dynamique qui sont linéaires par

(1) 1re liv. pp. 1 à 19.

rapport aux différentielles des vitesses. Cela est vrai pour le mouvement des systèmes matériels, pour le mouvement des solides et même pour les mouvements tourbillonnaires des liquides et des gaz. Il n'y a jamais de tâtonnements que quand il s'agit de trouver une position d'équilibre, un mouvement uniforme, un mouvement permanent, parce que la nature elle-même n'atteint ces solutions particulières qu'après des espèces d'hésitations : oscillations ou convergences. Nous comprenons très bien que la détermination de l'axe hydraulique du mouvement permanent donne lieu à des tâtonnements, parce qu'il s'agit d'une solution théorique qui ne se produit peut-être jamais dans la nature. Mais si quelques orages éclatent dans la partie supérieure du bassin d'un grand fleuve, nous comprenons difficilement que, pour déterminer l'effet immédiat du commencement de la crue provoquée par ces orages, on soit obligé de se livrer à des tâtonnements où l'on ferait intervenir toutes les résistances, depuis la mer jusqu'à la région où la crue se produit.

Avant de chercher les erreurs de principe, nous exposerons d'abord succinctement comment on peut, selon notre manière de voir, résoudre approximativement le problème du mouvement varié. Ce problème comporte deux fonctions inconnues : la cote d'eau z et la vitesse u en un point M de la rivière ; les variables indépendantes sont l'abscisse x du point M et le temps t. Ces deux fonctions inconnues satisfont à deux équations aux dérivées partielles. Si on porte le temps suivant un axe $o\ t$ perpendiculaire au profil en long, l'axe hydraulique engendre une surface qui représente la fonction z et que nous appellerons la surface hydraulique ; on représentera de même la fonction u par la surface des vitesses. Donnons-nous l'axe hydraulique initial AB et les vitesses correspondantes ; on sait, par le théorème de Cauchy, que l'intégrale analytique est complètement déterminée. On peut très facilement trouver cette intégrale par la formule de Taylor ; en un point M de l'axe initial, on connait les fonctions z et u et toutes leurs dérivées par rapport à x ; au moyen des deux équations aux dérivées partielles, on tirera

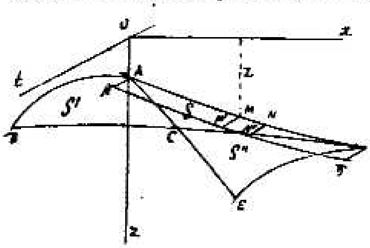

Fig. 1.

$$\frac{\partial z}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial t}$$

et en différentiant ces deux équations par rapport aux deux variables, on reconnaît sans peine que l'on peut calculer aussi les dérivées d'ordre quelconque. On peut alors écrire le développement de Taylor.

L'intégration par éléments en partant de l'axe initial permet évidemment d'obtenir cette même intégrale analytique. Ayant déterminé au point M les dérivées premières, on obtiendra approximativement les accroissements par les formules approchées

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial t}\Delta t, \qquad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t$$

Du point M, on déduira le point M'; de l'axe AB à l'instant t, on déduira l'axe A'B' à l'instant $t + \Delta t$. On trouvera de même les axes hydrauliques aux instants suivants et, par conséquent, la surface hydraulique S. Mais cette intégrale analytique, déterminée uniquement par l'axe initial, suppose que cet axe est prolongé indéfiniment dans les deux sens, sans aucune discontinuité dans les dérivées d'ordre quelconque. Si, au contraire, on donne arbitrairement les diagrammes des cotes d'eau dans les sections A et B, on introduit les discontinuités dans les courbes arbitraires ; ce sont ces discontinuités qui vont se propager suivant les caractéristiques.

Considérons d'abord un problème plus simple : construire une surface passant par un polygone curviligne CABD, et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

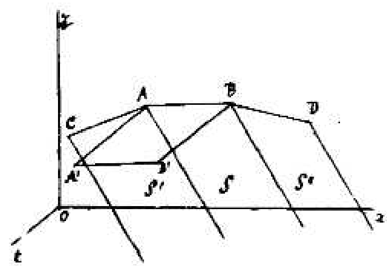

Fig. 2.

En partant de la ligne AB, on trouvera, soit par la formule de Taylor, soit par l'intégration par éléments, une surface analytique ABB'A'. Mais la courbe AB n'est pas prolongée analytiquement ; la courbe arbitraire présente des angles en A et B ; que va-t-il se passer ? Nous pouvons répondre immédiatement à cette question, parce que l'équation proposée est l'équation des cylindres dont la génératrice est parallèle à la bissectrice de l'angle $x\,o\,t$. L'intégrale cherchée se compose des surfaces S', S, S'' commandées respectivement par les arcs CA, AB et BD ; on voit que les discontinuités de la courbe arbitraire se propagent suivant les génératrices du cylindre, et que chaque sommet de la courbe arbitraire donne naissance à une arête. Ce sont ces génératrices qui sont les caractéristiques de l'équation proposée.

Les équations du mouvement varié forment un système de deux équations linéaires à deux fonctions inconnues. Comme nous l'avons annoncé dans notre résumé, il y a deux systèmes de caractéristiques, représentant le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde d'amont, l'onde d'aval ; de telle sorte que s'il y a un sommet dans l'axe hydraulique initial, ce sommet donnera naissance à deux arêtes de la surface hydraulique. En particulier, les angles A et B (fig. 1.) donneront naissance aux arêtes AC et CB ; la surface hydraulique comprendra une surface S commandée par l'axe initial, une surface S′ qui dépend des circonstances d'amont, une surface S″ qui dépend des circonstances d'aval. Mais les arêtes ACE et BCD ne sont pas les seules ; l'axe hydraulique initial est souvent décomposé en éléments rectilignes pour la facilité des calculs ; les diagrammes qui déterminent les circonstances d'amont et d'aval ne sont pas des diagrammes analytiques, mais des polygones ; toutes les discontinuités se propagent suivant les caractéristiques, qui divisent la surface hydraulique en triangles et quadrangles. La surface hydraulique est donc une surface analogue à un polyèdre ; les faces sont curvilignes, les arêtes sont des caractéristiques.

On peut conclure de là que le procédé d'intégration par éléments que nous avons exposé plus haut et qui convient à une surface analytique, ne peut plus être employé ; car on peut prouver qu'il revient à calculer les profils en travers par la formule de Taylor, et on ne peut pas calculer un polygone curviligne en appliquant la formule de Taylor au premier côté. Il n'y a qu'un moyen d'intégrer approximativement, c'est de déterminer de proche en proche les triangles et quadrangles limités par les caractéristiques ; ce n'est qu'en appliquant de cette manière l'intégration par éléments que l'on rencontrera des arcs analytiques auxquels on pourra appliquer les formules d'intégration approchée.

On remarquera que cette méthode n'est pas sujette aux objections que nous avons formulées précédemment. Toutes les particularités des diagrammes des circonstances d'amont et d'aval se propagent, non instantanément, mais progressivement avec la vitesse d'une onde infiniment petite ; cela est conforme au sentiment des choses de l'hydraulique. Tous les éléments de la surface hydraulique sont déterminés directement, et il n'y a aucun tâtonnement qui met en dépendance instantanée des éléments situés à grande distance ; cela est conforme aux sentiments des choses de la dynamique.

Pour examiner de plus près la méthode de calcul employée dans la « Résolution », appliquons-la à un seul élément MN de l'axe hydraulique à l'instant t; on trouvera l'élément correspondant M'N' de l'axe hydraulique à l'instant $t + \Delta t$ de la manière suivante : il y a quatre inconnues à déterminer, la cote d'eau et la vitesse aux points M' et N'; on donne une condition à l'amont et une condition à l'aval; on écrit deux équations aux différences approchées déduites des deux équations aux dérivées partielles et le problème est déterminé.

On voit par cet exposé que cette méthode repose sur des raisonnements qui ont toutes les apparences de la logique. On n'y trouve qu'une seule hypothèse; pour établir les équations aux différences approchées, on admet que les variations de la cote d'eau, de la vitesse, du débit dans une section, pendant l'intervalle Δt, sont représentées par des éléments rectilignes. C'est cette hypothèse que nous contestons. En effet, il s'agit alors d'une solution analytique, sans discontinuité, et en vertu du théorème de Cauchy, cette solution est complètement déterminée par l'axe initial, et il n'est pas possible d'introduire les conditions d'amont et d'aval. Il est facile de voir comment, dans la « Résolution », on a pu résoudre, en apparence, ce problème impossible. Nous avons vu que pour chaque point M de l'axe hydraulique, à l'instant t, on peut écrire deux équations aux différences approchées qui déterminent la cote d'eau et la vitesse au point M' de l'axe hydraulique à l'instant $t + \Delta t$; on peut donc écrire quatre équations pour l'élément M'N'; or, on n'a écrit que deux équations aux différences approchées; il y a donc deux équations qui manquent. On peut ainsi introduire les conditions d'amont et d'aval, mais les équations du mouvement varié ne sont plus satisfaites. Nous arrivons au même résultat si nous considérons un axe hydraulique divisé en plusieurs segments; on peut déterminer complètement le nouvel axe hydraulique en écrivant deux équations pour chaque sommet; on n'a écrit que deux équations pour chaque segment; il y a encore deux équations qui manquent et que l'on remplace par les conditions d'amont et d'aval. Nous voyons alors comment s'introduisent les tâtonnements que nous avons déclarés suspects; ils servent à répartir sur l'axe hydraulique tout entier les erreurs commises aux deux extrémités.

Pour terminer, considérons les diagrammes des hauteurs, des débits et des vitesses de la planche I annexée à la « Résolution ». Nous voyons que toutes ces quantités varient à partir de l'instant où la crue commence dans la section supérieure. On passe instantanément dans toute l'étendue de la rivière du régime permanent au régime varié. C'est ce que nous n'admettons pas. Ainsi, par exemple, nous croyons que la